Stoffdidaktikの考え方に基づいた動的幾何ソフトウェアの活用に関する研究 : 緩和法を題材として (数学ソフトウェアと教育 : 数学ソフトウェアの効果的利用に関する研究)

AUTHOR(S):

清水, 克彦; 木部, 敬太

数理解析研究所講究録
第 1865 巻 2013 年 146-153

Stoffdidaktik の考え方に基づいた 動的幾何ソフトウェアの活用に関する研究 ——緩和法を題材として——

東京理科大学 清水 克彦（Katsuhiko Shimizu）
Tokyo University of Science
東京理科大学科学教育研究科科学教育専攻 木部 敬太（Keita Kibe）
Graduate School of Mathematics and Science Education, TUS

1 はじめに

数学ソフトウエアの教育での利用では、ソフトウエアの持つ優れた機能を強調して、その機能を活用することを行う研究や実践が数多くみられる。DGS(Dynamic Geometry Software) の数学教育における利用においても、軌跡や動的変形などの機能、グラフ表示機能のとの連動など、その強力な機能を活用し、その良さを強調する教材開発研究が多い。そのこと自体は、DGS の活用として自然な流れであると思われる。しかしながら、それによってどのような数学教育の目的が実現されたのかについての検討が、そのような研究においては深くなされていないのではないかとの指摘がある。例えば、世界的に普及した DGS である Cabri Geometry の開発グループの Collete Laborde はそのような活用を、”Technology on Sunday”と呼び、特別な日のテクノロジー使用になっていて、機能のみを良さしか理解されないと指摘している。本稿では数学教育研究の分野で「問題の発展的な扱い」や「問題から問題へ」と呼ばれる活動を実現することに着目して、問題を解決した後やある定理を証明した後に、その問題や定理について、考察を行うことを実現するための DGS の活用について検討を行った。これは Stoffdidaktik とドイツの数学教育学では呼ばれている教材研究の方法論を参考にして、DGS を活用して問題や定理に対する数学的探究を「数学者が行うように」に行うことを実現すること目指しているものでもある。本研究は、そのなかでも問題や定理の条件を緩和することによって、どのようなことが起こるのかを DGS によって探求し、問題場面や定理が持つ数学的な構造を把握しようとすることを試みている。

2 本稿における「緩和法」定義

定理や問題において与えられた仮定や条件を緩めることで，その定理や問題についての新たな知見を得ることは，数学の領域においてしばしば行われる手法である．そこで本稿

においては「緩和法」を以下のように定義し，その検討を行っていく．また本稿における「緩和法」は，断りのない限り下記の定義による「緩和法」を指すこととする．

緩和法

> 定理や問題において，その仮定や条件を緩めることで新たな定理，問題，概念を探求する教材研究法．

この研究法を数学教育に持ち込むことによって，元となる概念から条件の緩和された概念への一連の教材を開発することができる．これは一つのStoffdidaktikを実現するための一つのアプローチであると考えられる．

また本稿では緩和法を適用する題材の範囲を，平成24年度より実施の高等学校数学Aに「作図」が追加された幾何分野とし，研究を行った．

3 緩和法を扱う際にDGSが担う役割の考察

緩和法においてDGSが担う役割を整理する．

第一に，複雑な図形の正確な作図による問題の視覚化が挙げられる．DGSによる頭の中だけで形づくることが難しい複雑な図形の作図は，探究的活動に伴うより進んだ概念の視覚化に耐えうる手段となる．

第二に，動的図形を動かす際に即時的に得られる視覚的なフィードバックが挙げられる．図形がその幾何学的性質を保ったまま連続的に動く様子は，静的図形の断片的な情報よりも情報量が多く，さらに保たれる幾何学的性質などのその図形的意味を際立たせ，生徒によるその理解を支援すると考えられる．さらにDGS上の自由点のドラッグによる発見的な問題解決は，緩和法における新たな定理や概念の探求を支援しうる．

第三に，DGSに組み込まれているトレース機能や軌跡ツール，図形の再定義機能が挙げられる．トレース機能は動的推論をもとにした実験的活動の跡を残し，その跡が何であるかの推測を促すことで概念の探求を支援する．さらに軌跡ツールは従属点を動かした時の他のオブジェクトの通る跡を連続的に表し，探求した概念のより明確な視覚化が可能となる．また図形の再定義機能は緩和法の軸となる条件緩和を幾何的に行うことにつながり，さらにDGSが示す再定義の可否が，より正確な条件緩和の過程の思考へ導く．

これらのDGSが担う役割は，DGSを用いない緩和法における思考実験の一部置き換えまたは簡単化にあり，DGSの使用者は，緩和法における推論を概念の探求に集中することができると考えられる．

ただし，DGS上で観察された性質には厳密には証明が必要である．しかしDGSは基本的に定理の証明は行わないため，DGSの使用者が証明を行う必要がある．この点から，DGSの支援による緩和法においては，DGSの担う役割を把握して行う必要があると考えられる．

4 教材例「接する2円の接点と共通外接線の接点を結んだ2直線は直交する」の定理拡張

4.1 元となる定理

本章では，以下の定理に関する条件緩和を考えて定理拡張を行うことを，教材例として示す．

定理 4.1

円 O と O' が点 P で接し，円 O 上の点 A と円 O' 上の点 B を結ぶ直線 AB がその共通外接線であるとき，$\angle APB = 90°$ である．

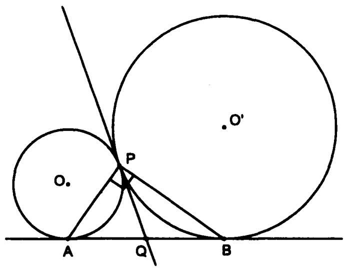

図 1: 外接する円の共通外接線の接点と円の接点のなす角

この定理の証明は以下のとおりである．

証明

$\angle PAB = a, \angle PBA = b$ とおくと，2接線とその接点を結ぶ弦がなす三角形は弦を底辺とする二等辺三角形なので，

$$\angle QPA = \angle QAP = a, \ \therefore \angle PQB = 2a.$$
$$\angle QPB = \angle QBP = b.$$
$$\therefore 2a + b + b = 180°, \ a + b = 90°.$$

したがって，$\angle APB = 180° - (a + b) = 90°$ ∎

この定理の仮定部分の条件が表すものは，2円 O, O' についての定理であるということと，2円の接点と共通外接線の接点を結んでいることである．緩和法により，ここではこれらの条件のうち「2円が接する」という条件を緩和することを考えていく．

4.2 第一の条件緩和

定理 4.1 の仮定部及びその定理の証明を比較すると，証明には「2円が外接する」という条件を用いていないことがわかる．これは上記の定理を，2円が接している特別な場合における定理であると捉えることができることを示す．つまり，点 P を通る2円の接線を2円の共通内接線と考えることができ，2円が接していなくても共通内接線の接点における性質として捉えることができると考えられる．

以上のような推測のもと，DGS を用いて作図することでその妥当性を検証することができる．そして証明に使われていない条件を緩和したため，定理の証明の論法を変えずに上記の定理を拡張することができる．

定理 **4.2** (拡張された定理)

互いに内包せず交わらない 2 円 O と O' があり，その共通外接線の一方の接点をそれぞれ A，B とする．また 2 円の共通内接線の一方の接点をそれぞれ R_1，R_2 とし，直線 AR_1 と BR_2 の交点を P とするとき，$\angle APB = 90°$ である．

証明

$\angle PAB = a, \angle PBA = b$ とおくと，2 接線とその接点を結ぶ弦がなす三角形は弦を底辺とする二等辺三角形なので，

$$\angle QR_1A = \angle QAR_1 = a, \ \therefore \angle R_2QB = 2a.$$
$$\angle QR_2B = \angle QBR_2 = b.$$
$$\therefore 2a + b + b = 180°, \ a + b = 90°.$$

したがって，$\angle APB = 180° - (a + b) = 90°$ ∎

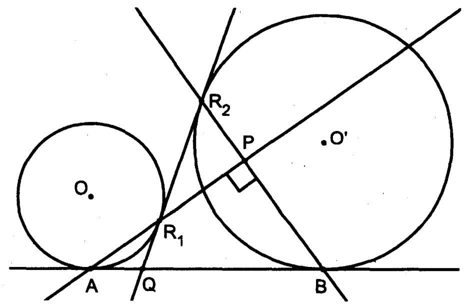

図 2: 円の共通外接線の接点と共通外接線の接点を結ぶ直線のなす角

このように定理の証明に着目することによって，定理の条件を緩和し，定理を拡張することができた．また，DGS 上の図形を動かし 2 円を近づけていくことによって，もとの定理の図に近づいていくことが観察される (図 3).

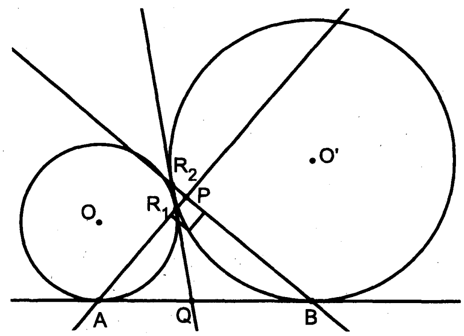

図 3: 拡張された定理の 2 円を近づけた場合

4.3 推測の間違いと結論変更

前節において，2円が接する場合と交点を持たない場合を考えたので，さらに別の条件に着目してこの活動を続けたとする．この時次に行う推測として，2円が2交点を持つ場合を考えようとするかもしれない．例えば「2交点と共通外接線の交点とを結ぶ2直線のなす角は90°かも知れない」と推測することが考えられる．しかしこの推測は間違いである(図4)．それは「共通内接線」という条件を外してしまったことによっている．

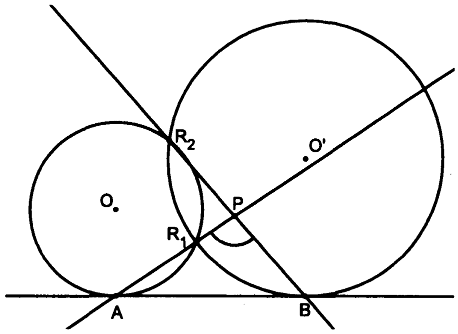

図 4: 2円が交わる場合 (推測の間違い)

拡張された定理の証明を見ると，証明の中で「円外のある点を通る2接線とその2接点を結ぶ直線は，2接点でなす角を底角とする二等辺三角形である」という性質を用いている．このことから,「共通内接線」という条件を外すと証明が成り立たなくなってしまうため，ここでは外してはならない条件であったと考えられる．最初の定理に戻って考えてみると,「2円が接する」という条件を外すことができたのは，その定理の証明の根拠として「接線」の性質は用いていても「2円が接する」という性質が用いられていなかったことによると考えられる．

「交わる2円」という条件のもとでは，$\angle APB = 90^\circ$ が保たれないことがわかった．ではここからは一度緩和法を離れ,「この条件のもとで保たれる結論に関する議論」を行う．今描かれている図形(図4)には，2円の共通外接線の一方についての接点2点と，2円の交点2点が描かれており，そこからそれぞれを結んだ4直線を考えることができる．先程まで考えていた角は,「2円の共通外接線の一方についての接点2点と2円の交点の一方とをそれぞれ結んだ2直線のなす角」であったので，当該角は2つできることになる（図??における $\angle AP_1B, \angle AP_2B$）．ここで，この2角の角度をDGS上で表示させると，2つの角度の和が180°となりそうであることが推測できる．実際にDGS上で2つの角度の和を計算させると，2円が交わる限り180°が保たれることが確認できる．また，図??における AR_1, AR_2, BR_1, BR_2 がなす四角形に着目したとき，DGSの3点を通る円を描くツールを用いることによってその4頂点が同一円周上にあることが確認できる．この性質は以下のように定理とすることができる．

定理 4.3 (結論を変更した定理)

> 交わる2円があって，その共通外接線の一方の接点2点と，2円の交点2点をそれぞれ結んだ4直線のなす四角形は円に内接する．

この証明は割愛するが，$\angle AP_1B + \angle AP_2B = 180°$ を証明することで，結論変更の推測が正しかったことが確認できる．

4.4 第二の条件緩和

定理 4.3 は 2 円が交わっているときの定理であり，2 円が接しているときを考えると交点は接点に変わるため，4 点はすべて接点に集まると考えられる．そこで緩和法に立ち返り，「4 点が同一円周上に存在する」という結論が得られるという視点で，「2 円が互いを内包せず交わらない」という仮定を見直したら，どのような定理が得られるかを，以下で考察していく．

定理 4.2 より，互いに内包せず交わらない 2 円の共通外接線の一方の接点と，共通内接線の一方の接点の同一円周上にある点同士を結んだ 2 直線は直交することがわかっている．ここで，もう一方の共通内接線に関しても同様の操作を行うことで，直交する 2 直線を得ることができ，これら 4 直線がなす四角形は 1 組の対角がどちらも 90° となり円に内接する，という推測が立てられる．実際に DGS を用いて作図すると，このような四角形が存在し，その四角形が円に内接することが観察できる．

定理 **4.4** (結論を変更した定理を拡張した定理)

互いに内包せず交わらない 2 円 O_1, O_2 があって，その共通外接線の一方の接点 A, B と，2円の共通内接線の接点 R_1, R_2, R'_1, R'_2 がある．AR_1 と BR_2 の交点を P_1，AR'_2 と BR'_1 の交点を P_2，AR_1 と BR'_1 の交点を Q_1，AR'_2 と BR_2 の交点を Q_2 とすると，4 直線のなす四角形 $P_1Q_1P_2Q_2$ は円に内接する．

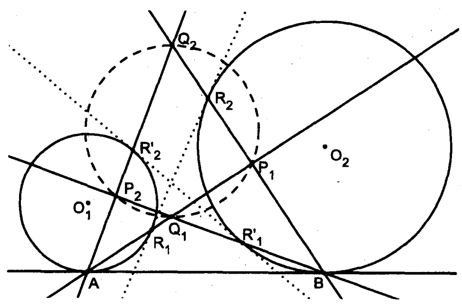

図 5: 円の共通外接線の接点と共通内接線の接点を結ぶ 4 直線がなす四角形

2 円が接する場合は 2 交点が 1 点に，2 本の共通内接線が 1 本に重なったと考え，面積 0 の四角形が 2 円の接点に存在すると考えることができる．また，2 円が互いを内包する場合は共通外接線が作図できないため，結論を満たす四角形は存在しない．よって，共通外接線の作図できる 2 円において，それらの任意の位置関係を仮定においても，同様の結論を得られることが発見される．

2 円 O_1, O_2 とその共通外接線の一方の 2 円との接点 A, B について，定理拡張の流れをまとめると表 1 のようになる．

	仮定	結論
元の定理	O_1, O_2 は外接する O_1, O_2 の接点 P	$\angle APB = 90^\circ$
拡張された定理	O_1, O_2 は交わらない O_1, O_2 の共通内接線の一方の接点 R_1, R_2 AR_1, BR_2 の交点 P	$\angle APB = 90^\circ$
結論を変更した定理	O_1, O_2 は交わる O_1, O_2 の交点 R_1, R_2 AR_1, BR_2 の交点 P_1, AR_2, BR_1 の交点 P_2	4 直線のなす四角形は円に内接する
結論を変更した定理を拡張した定理	O_1, O_2 は交わらない O_1, O_2 の共通内接線の接線 R_1, R_2, R'_1, R'_2 AR_1, BR_2の交点 P_1, AR'_2, R'_1の交点 P_2 AR_1, BR'_1の交点 Q_1，AR'_2, BR_2の交点,Q_2	4 直線のなす四角形は円に内接する

表 1: 教材例 1: 定理拡張の流れ

この教材例においては，2 円の位置関係によって成立や不成立が決まる定理を扱っていると言える．その点で，図形の動きが連続的かつ動的に観察できる DGS による動的図形が，定理拡張における推測を支援していると言える．そして定理 4.3 と定理 4.4 を組み合わせた動的図形を DGS 上に描くことによって，2 円の位置関係によらず成立する「4 直線のなす四角形が円に内接する」様子を観察することが出来る．この教材例によって，2 円間に成り立つ性質のうち一つの系について研究し体系化することが出来たと言える．

4.5 本教材例のまとめ

教材例「接する 2 円の接点と共通外接線の接点を結んだ 2 直線は直交する」の定理拡張は，主に定理の証明に使われていない条件を手がかりとした条件緩和や，定理を表す図形からの推測によって進められた．本教材例を数学的活動として扱うことにより，次のような活動を生徒に促すことが期待される．

- 定理の条件を緩和することによる概念拡張を行うことができる．そしてこの活動に DGS が支援することで概念拡張を視覚化し，より活動がわかりやすくなっていると考えられる．
- DGS の支援による緩和法がより発展した内容への推測を促し，それにより主体的に課題を作り出すことができること考えられる．ただし推測に間違いが生じた場合でも DGS はその理由を示さないため，証明など他の手がかりから推測の間違いの理由を考える活動が生まれる．
- 結論変更によって得られた定理を更に条件緩和する推測を立て，実際にそれを行うという課題発見と課題解決の活動を行うことができる．さらに DGS が支援することで，2 つの定理を組み合わせた図を描くことによりそれらの関係性を捉え，2 円の位置関係という視点に立って定理を体系化する活動を行うことができる．

5 おわりに

参考文献

[1] 植松嘉夫 (2011)「コンピュータを活用した高等数学の教材開発と指導法の研究」,『第44回数学教育論文発表会論文集 (第1巻)』, 459-464 頁.

[2] Paul Zeitz 著, 山口文彦, 松崎公紀, 三橋泉, 松永多苗子, 伊知地 宏編 (2010)『エレガントな問題解決: 柔軟な発想を引き出すセンスと技』, オライリー・ジャパン, オーム社.